TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Algorithmen und Software für moderne Finanzmathematik

Ralf Korn
Technische Universität Kaiserslautern
Fraunhofer ITWM Kaiserslautern

ITWM

Fraunhofer Institut Techno- und Wirtschaftsmathematik

Gliederung:

- **Was ist Finanzmathematik ?**
- **~~Wie wird man reich~~ ?** **Portfolio-Optimierung**

Hauptarbeitsgebiet:
AG Korn

- **~~Wie vermeidet man Risiken~~ ?**
- **~~Was kostet das~~ ?**

Optionsbewertung

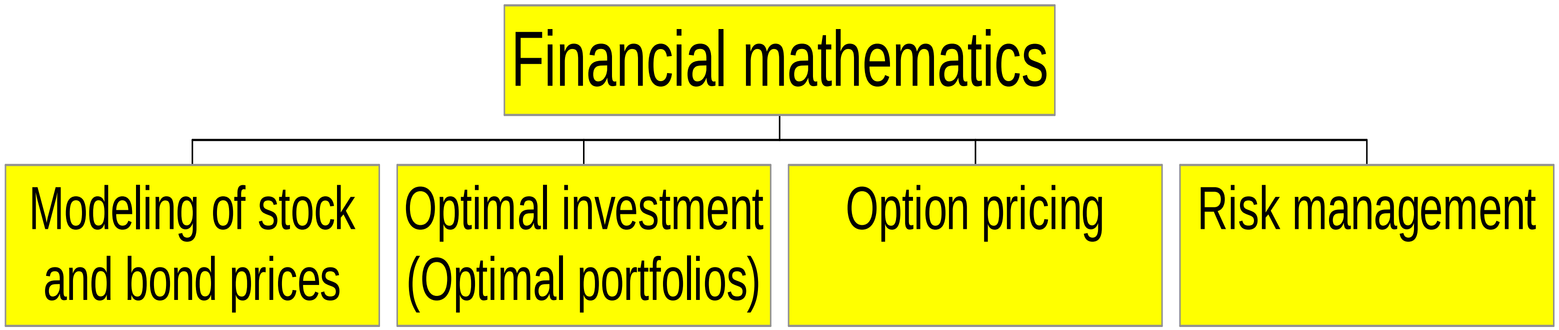
Projekt: AG Korn/AG Poetzsch-Heffter / Abt. FM ITWM

- **~~Wo hilft Finanzmathematik noch~~ ?**

Simulation und Steuerung ökonomischer Prozesse

Projekt: AG Korn/Abt. FM ITWM/ Univ. Leeds

1. *Was ist Finanzmathematik ?*



1. *Was ist Finanzmathematik ?*

Welche Mathematik wird benötigt ?

- ***Stochastik*** (insbesondere stochastische Prozesse)
- *Statistik*
- ***Stochastische Analysis*** (Itô-Kalkül)
- *(Nicht-lineare) Optimierung*
- *Partielle Differerentialgleichungen*
- ***Stochastische Steuerung*** (Dynamische Optimierung)
- *Numerische Methoden*
- *Monte Carlo Methoden*

2. *Wie wird man reich – Grundlagen der Portfolio-Optimierung*

1. Idee: *“Bestimme die Strategie, die mich zur Zeit T* ***so reich wie möglich*** *macht “*

- Nicht möglich (“Kenntnis zukünftiger Preise benötigt”)
- Notwendigkeit eines ***stochastischen Modells***

2. Idee: *“Bestimme die Strategie, die mein* ***mittleres zukünftiges Vermögen $E(X(T))$ so groß wie möglich*** *macht”*

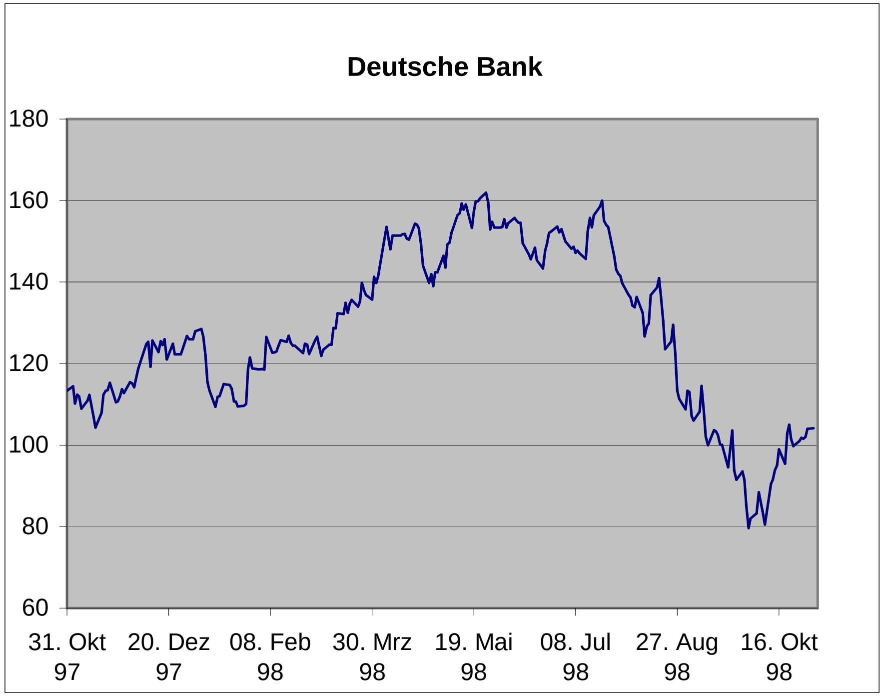
- Das Problem ist die Lösung (“alles Geld in **eine** Anlage!”)
- Notwendigkeit eines Modells mit Berücksichtigung von ***Risiko und Ertrag***

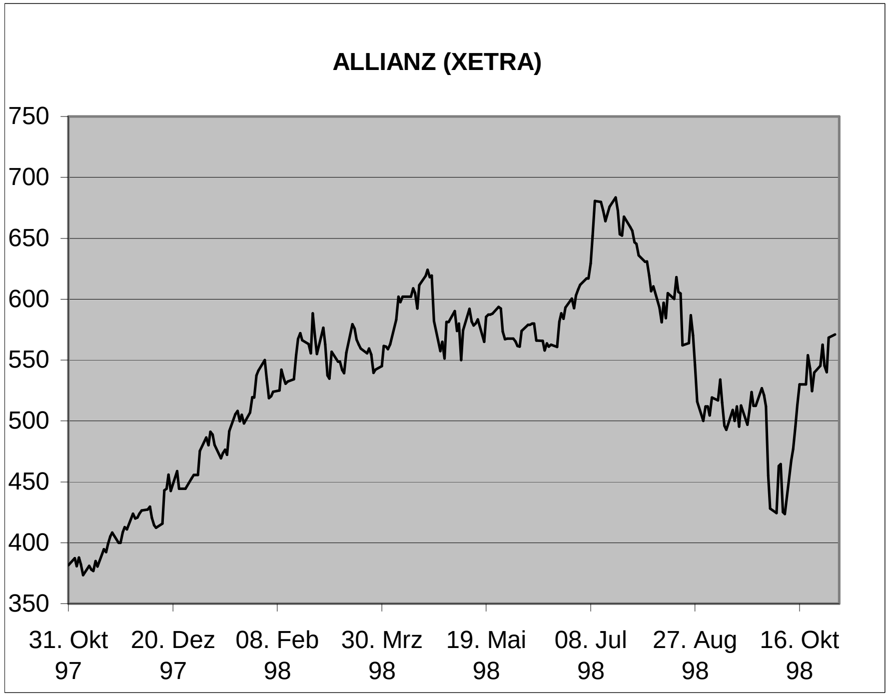
3. Idee: *“Bestimme die Strategie, die mein* ***mittleres zukünftiges Vermögen $E(X(T))$ unter akzeptablem Risiko so groß wie möglich*** *macht”*

- Markowitz: Erw.wert-Varianz-Prinzip (Nobelpreis 1990) => ***statischer Ansatz***
- Notwendigkeit eines ***dynamischen Modells*** für ***Aktienkurse*** und ***optimales Investment***

3. *Dynamische Aktienpreismodelle*

- Reale Daten





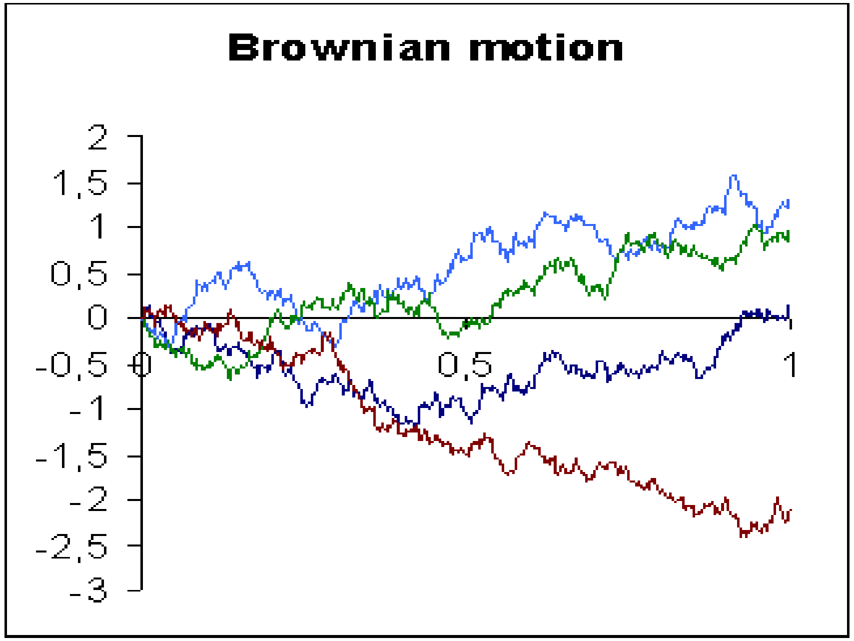
$\Rightarrow$

- Irreguläre Bewegung im Zeitablauf (“***Nicht-glatt***”)
- (lokal) keine vorhersehbare Tendenz, Fluktuationen dominieren

3. *Dynamische Aktienpreismodelle*

<u>Fundamentaler Baustein:</u> ***Brownsche Bewegung*** $W(t)$

- $W(0)=0,\ W(t)-W(s)\sim N(0,t-s),$ ***stationäre Zuwächse***
- $W(u)-W(r)$ *unabhängig von* $W(t)-W(s),\ s\le t\le r\le u$ ***unabhängige Zuwächse***



Eigenschaften:

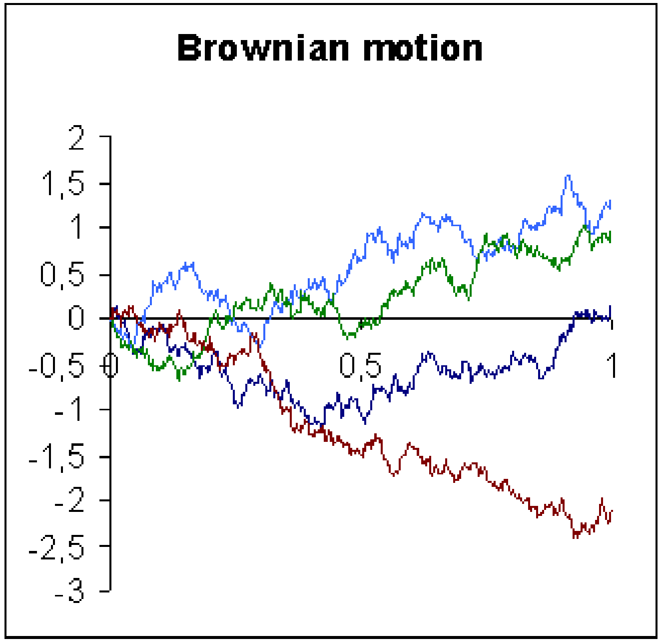
- *nirgends differenzierbar*
- *Pfade haben unendliche Länge*

$\Rightarrow$ Brownsche Bewegung modelliert den Zufallseinfluss (mehrdim. Verallgemeinerung einfach)

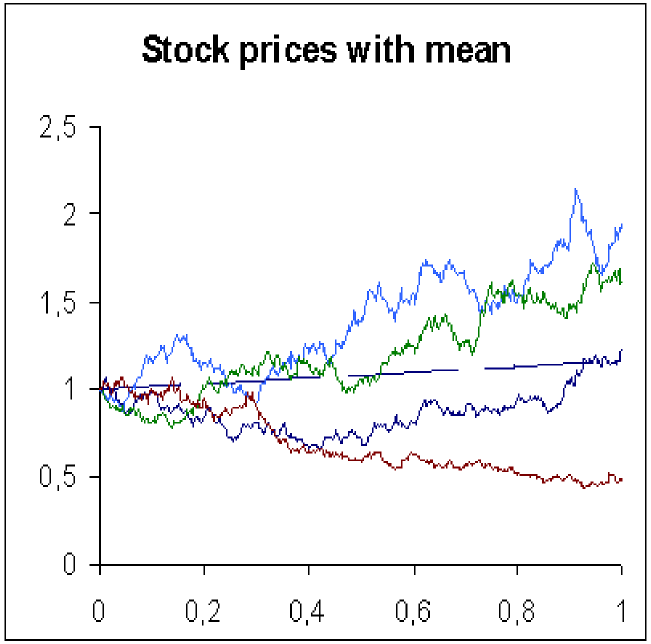
3. *Dynamische Aktienpreismodelle*

⇒ Aktienpreis (einfachstes Modell): ***Geometrische Brownsche Bewegung***

$$S_1(t) = S_1(0) \cdot exp\left(\left(b - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)\right), \qquad E\left(S_1(t)\right) = S_1(0) \cdot exp(b \cdot t)$$



⇒



⇒ relativ gute Approximation der realen Welt (wenn auch verbesserbar !)

Konsequenzen:

- übliche Rechenregeln der Analysis sind nicht anwendbar
- stochastische Analysis notwendig

$\Rightarrow$ ***Itô-Kalkül:* Rechnen mit Brownscher Bewegung**

$$f\left(t,W(t)\right)=f(0,0)+\int_0^t f_x\left(s,W(s)\right)dW(s)+\int_0^t f_t\left(s,W(s)\right)ds+\tfrac{1}{2}\int_0^t f_{xx}\left(s,W(s)\right)ds$$

- Modell lässt sich einfach simulieren
- .....

4. *Optionen und Optionsbewertung*

Was sind Optionen ?

- im üblichen Sprachgebrauch: Rechte (“Möglichkeiten”)
- im Finanzbereich: Verträge, die eine ***zukünftige Zahlung*** ***unsicherer*** (aber idR nicht-negativer !) ***Höhe*** ***garantieren***
- Zahlungen hängen meist von einer zugrunde liegenden Größe ab („***Derivate***“)

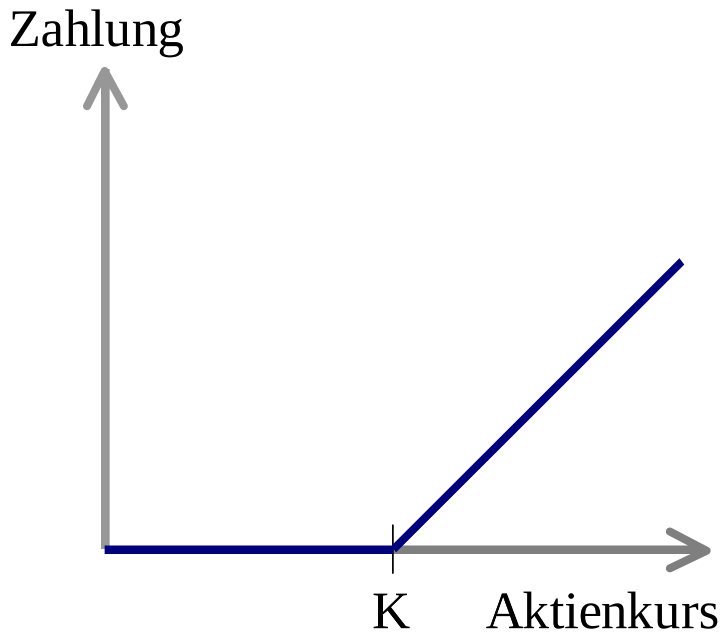
Welche Typen von Optionen gibt es ?

- Kauf- und Verkaufsoptionen („***Calls, Puts***“) auf Aktien und Güter
- Europäische und Amerikanische Optionen
- Exotische Optionen („unzählige Beispiele .... „)

Eines unserer Ziele: ***Erstellen eines Softwaretools zur freien Konstruktion weiterer Optionen*** (Projekt AG Korn / AG Poetzsch-Heffter

<u>Bsp. 1:</u> ***Europäischer Call mit Ausübungspreis K und Laufzeit T***

≈ **Zahlung von** $B = \left(S_1\left(T\right) - K\right)^+$ **zur Zeit T**



<u>Bsp. 2:</u>

i) ***Barriere-Optionen***

Down-and-out-Call ≈ Zahlung von $B=\left(S_1\left(T\right)-K\right)^+ \bullet 1_{\left\{S_1(t)>H\ \ \forall t\in[0,T]\right\}}$ in T

$\Rightarrow$ Pfadabhängigkeit

ii) ***Basket-Optionen***

Zahlung von $B=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i S_i\left(T\right)-K\right)^+$ in T

$\Rightarrow$ Hochdimensionalität

ii) ***Cliquet-Optionen***

Zahlung von $B=P+max\left\{min\left\{\sum_{i=1}^{n} max\left\{min\left[\alpha_i \frac{S(t_i)-S(t_{i-1})}{S(t_{i-1})},C_i\right],F_i\right\},C\right\},F\right\}$

$\Rightarrow$ Hochdimensionalität **und** Pfadabhängigkeit

<u>Warum handelt man mit Optionen ?</u>

- Absicherungsfunktion (“***Hedging***”)
- Spekulationsfuktion:
    - Geringerer Preis als die Aktien
    - Höhere Liquidität
    - Höhere prozentuale Gewinne (und Verluste): ***Hebeleffekt***

<u>Wo liegt das Risiko beim Optionshandel ?</u>

Optionen haben eine endliche Laufzeit

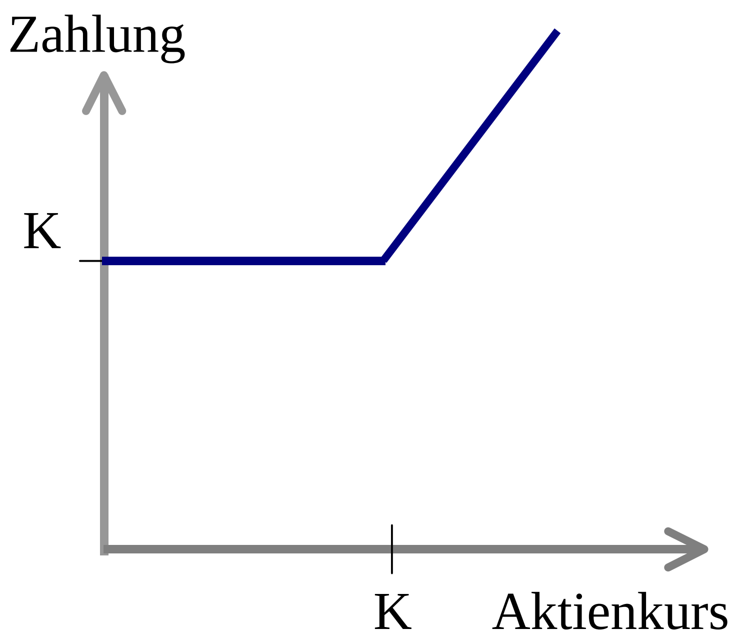
$\Rightarrow$ Möglichkeit des **<u>Totalverlusts</u>** ! (In BWL-Deutsch: ***„Das Verlustrisiko beim Kauf einer Option ist auf die Kaufprämie beschränkt“***)

<u>Bsp. 3:</u> ***Portfolioversicherung mit Hilfe eines Europäischen Puts***

Europäischer Put ≈ Zahlung von $B = \left(K - S_1(T)\right)^+$ zur Zeit T

Portfolioversicherung (Einfachstes Bsp.)**: Halte Aktie + Put**

$\Rightarrow$ Zahlung in T$= \left(K - S_1(T)\right)^+ + S_1(T) = K + \left(S_1(T) - K\right)^+$



Hauptproblem: *Wie bestimmt man den Preis einer Optionen ?*

- **Übliche Ansätze**:
  - Über Angebot und Nachfrage (hilft nix !)
  - Als Barwert: $E\left(e^{-rT}B\right) \Rightarrow$ Ist falsch, wenn $b \neq r$ gilt !

- **Finanzmathematischer Ansatz** (einzig richtiger !):

  Verwende die beiden folgenden Prinzipien

  - ***No-Arbitrage-Prinzip*** („Es gibt keine risikolosen Gewinne ohne Einsatz von Eigenkapital“)
  - ***Duplikationsprinzip*** („Bilde die Option mittels Aktien und risikoloser Geldanlage nach“)

<u>Hauptresultat: *Risiko-neutrale Bewertung*</u>

a) Im allgemeinen Black-Scholes-Modell (n Aktien, n-dimensionale Brownsche Bewegung) kann jede beliebige (europäische) Endzahlung durch das Verfolgen einer geeigneten Handelsstrategie im Bond und den n Aktien exakt (!) dupliziert werden

(„Vollständigkeit des Marktes“).

b) Im allgemeinen Black-Scholes-Modell ist der eindeutige Preis einer Option mit Endzahlung B gegeben durch

$$E_Q\left(e^{-rT}B\right)$$

Hierbei ist das Maß Q eindeutig durch die Tatsache bestimmt, dass für alle Wertpapiere unter Q

$$E_Q\left(S_i\left(t\right)\right)=s_ie^{rt}$$ **(„risiko-neutrale Bewertung“)**

gilt.

<u>Konsequenzen aus „*Risiko-neutrale Bewertung*“:</u>

1. Zur Optionsbewertung kann oBdA für alle Aktien $b_i = r$ angenommen werden.

2. Berühmteste Formel:

   Black-Scholes-Formel für einen Europäischen Call

$$s\Phi\left(\frac{ln\left(\frac{s}{K}\right)+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)-Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{ln\left(\frac{s}{K}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

3. Alle Methoden zur Berechnung eines Erwartungswerts liefern mögliche Bewertungsalgorithmen:

- Integration
- Monte Carlo Simulation
- Partielle Differentialgleichungen
- Approximation durch diskrete stochastische Prozesse
- .....

4. Für unser projektiertes Softwaretool wird ein universeller Bewertungsalgorithmus benötigt (kombinierbar, unabhängig vom Optionstyp, nicht stark wachsend in der Dimension) $\Rightarrow$ Approximation durch ***mehrdimensionale, vollständige Bäume***

Hintergrund:

- Entscheidungen mit gesellschaftlicher Relevanz (Steuerschätzung, Konjunkturprognosen, Rentenmodelle, Altersvorsorge, ...) werden oft nicht (!) modellbasiert (oder stark vereinfachend) getroffen !
- Viele Einflussfaktoren (z.B. Zinsentwicklung, Inflation, Aktienkurse, Wechselkurse, ...) werden in der Finanzmathematik erfolgreich modelliert
- Die Theorie der stochastischen Steuerung ist weit fortgeschritten

Konsequenz:

- ➢ Mathematische Werkzeuge und Resultate sind vorhanden ....
- ➢ Wenige Zutaten müssen noch modelliert werden (Produktivität, Beschäftigung, ...
- ➢ ....

<u>Ziel:</u> Erstellung eines (Software-)Rahmens zur (stochastischen) Modellierung und Steuerung ökonomischer Prozesse z.B:

<u>Input:</u>

Inflation $dI(t) = I(t)\left\{\left(r_N(t) - r_R + \lambda\right)dt + \sigma dW_1(t)\right\}$

Zins (Nominalzins) $dr_N(t) = \left(\theta - \alpha r_N(t)\right)dt + \nu dW_2(t)$

Aktienmarkt $dA(t) = A(t)\left\{\mu dt + \sqrt{\vartheta(t)}dW_3(t)\right\}, \quad d\vartheta(t) = ...$

Überlebensintensitäten $p(t+1,t,t+1,x) = \left(1 + exp\left(A_1(t+1) + A_2(t+1)(x+1)\right)\right)^{-1}$

Arbeitslosigkeit **?**

<u>Steuerung:</u>

Gesetze**,** Subventionen, ... : Wirkweise ?

<u>Ziel (z.B):</u>

Maximiere das Bruttosozialprodukt: $f\left(r(.), I(T), A(.), ? \middle| Gesetze, Subventionen, ...\right)$

Mathematische Probleme:

- Behandlung nicht-linearer (stochastischer) Differentialgleichungen
- Grenzverhalten und Stabilität
- Modellierung der Wirkweise der Maßnahmen:
  - Steuerung mit Verzögerung („Delay-Gleichungen“)
  - Steuerung mit unsicherer Wirkung (verallgem. HJB-Gleichungen)
- Schätz- und Kalibrierungsprobleme
- Abschätzungen von Simulationsfehlern
- **Implementation !**

$\Rightarrow$ reichlich Betätigung !